Introduzione alla Teoria dei Giochi

Giochi dinamici a informazione completa

Lorenzo Rocco

Scuola Galileiana - Università di Padova

01 aprile 2010

Giochi in forma estesa

Una rappresentazione alternativa alla forma normale è la forma estesa.
Nella forma estesa viene esplicitato:

- chi sono i giocatori
- quando è il turno di gioco di ogni giocatore
- cosa sa ciascun giocatore quando tocca a lui muovere
- cosa può fare quando deve muovere
- i payoffs

Alberi decisionali

- radice : nodo iniziale, indica chi è il primo giocatore a muovere
- nodi : in generale idicano chi deve giocare
- rami : indicano le azioni disponibili in prossimità di ogni nodo
- nodi terminali : indicano gli esiti del gioco
- foglie : indicano i payoff associati ad ogni esito del gioco

Esempi di forma estesa

- forma estesa del gioco di entrata
- forma estesa dell'ultima mano a briscola
- forma estesa del dilemma del prigioniero

Set informativi

- Gli information set sono insiemi di nodi (in cui un giocatore può essere chiamato a muovere in un dato turno).
- Rappresentano l'informazione che ogni giocatore possiede riguardo lo svolgimento precedente del gioco al momento in cui deve muovere.
- Tutti i nodi di un information set sono indistinguibili dal punto di vista di un giocatore
- L'insieme di azioni disponibili in ogni nodo di un information set è lo stesso.

Strategie

Una strategia s è una funzione che associa ad ogni insieme informativo una mossa disponibile in ciascun nodo di quel sistema informativo

$$s_i : H_i \longrightarrow A_i$$

- Una strategia è un piano d'azione che indica al giocatore cosa fare in ogni possibile circostanza (contingenza) lui si trovi a giocare
- Una strategia è un manuale. L'insieme delle strategie è una biblioteca.

Esempio: definire l'insieme delle strategie nel dilemma del prigioniero sequenziale
Esempio: definire l'insieme delle strategie nel dilemma del prigioniero simultaneo

Strategie, esiti e payoff

- Ogni profilo di strategie determina il sentiero che sarà seguito dal gioco lungo l'albero decisionale fino a un nodo terminale (esito).
- Poiché ad ogni esito del gioco è associato un payoff, ad ogni profilo di strategie è associato un payoff

Nota: la funzione di payoff è definita sopra spazi di funzioni!

Forma estesa e forma normale

Ogni gioco in forma estesa può essere trasformato in forma normale:

- si determinano le strategie di ogni giocatore
- si associano i payoffs alle strategie

Ma data una forma normale, senza ulteriori informazioni, non si può risalire alla forma estesa (a ogni forma normale sono associabili infinite forme estese).
Nota: nella forma normale è come se i giocatori scegliessero simultaneamente che "manuale" usare, oppure se lo "offrissero in busta chiusa"

Equilibri di Nash non "credibili"

Sulla forma normale si può applicare il concetto di equilibrio di Nash.
Quindi l'equilibrio di Nash si può applicare anche a giochi molto complessi, dinamici, con strutture informative molto elaborate.
In alcuni casi gli equilibri di Nash contengono minacce "non credibili", ovvero troppo costose da attuare.
Esempio: entry game

Esercizio.

Exercise: There are 2 firms $i = 1, 2$. Let q_i denote the quantity produced by firm $i = 1, 2$ at cost $4q_i$.Each firm cannot produce more than 3. The total demand is $P(Q) = 6 - Q$ where $Q = q_1 + q_2$. Firm 1 moves first choosing the quantity it wants to produce; firm 2 moves having observed the quantity produced by firm 1. Let describe the set of pure strategy of each player. Find a NE in which firm 2 produced the monopoly outcome and firm 1 produces zero. Find the SPNE of the game.

Sequential rationality

Per elimiare gli equilibri di Nash basati su minacce non credibili aggiungiamo il criterio della sequential rationality:

Definition

tutti i giocatori adottano la loro migliore strategia ad ogni set informativo

Backward induction

Se i giocatori sono sequentially rational, allora la strategia ottima può essere determinata a ritroso, partendo dalla fine del gioco: backward induction.
Questa procedura consente "di per sè" di selezionare equilibri di Nash credibili in due classi di giochi (anche se ha applicazione più generale):
1) giochi con informazione perfetta
2) multi-stage games

Classe 1: giochi con informazione perfetta

Se tutti gli information set del gioco sono singleton, allora un gioco è con informazione perfetta.
Tutti i giocatori hanno osservato e sanno precisamente la storia precedente del gioco.

- Esempio: gioco di Stakelberg (produci tanto, produci poco)

Theorem

(Zermelo's Theorem) Ogni gioco finito con informazione perfetta ha almeno un equilibrio di Nash in strategie pure che può essere ottenuto tramite backward induction (quindi un equilibrio di Nash che soddisfa la sequential rationality)

Classe 2: multi-stage games

Definitions

I multi-stage games sono formati da molteplici stadi di gioco, eventualmente infiniti, dove:

1. tutte le azioni giocate precedentemente sono state osservate da tutti i giocatori
2. tutti i giocatori giocano simultaneamente in ogni stadio (e quindi non osservano cosa gli altri giocatori stanno giocando in quello stadio)

Esempio: dilemma del prigioniero ripetuto due volte
Esempio: dilemma del prigioniero nel primo stadio, Bach vs Stravinsky nel secondo stadio

Equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi

Un equilibrio di Nash che soddisfa la sequential rationality è un Equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi:

Definition

Un equilibrio di Nash $(s_1, \ldots s_I)$ è perfetto nei sottogiochi se e solo se le strategie di continuazione formano equilibri di Nash in OGNI sottogioco.

Nota: l'esito di backward induction nei giochi con informazione perfetta è un SPNE.

Sottogiochi e strategie di continuazione

Definition

Un sottogioco è una porzione dell'albero decisionale, che inizia da un nodo appartenente a un insieme informativo singleton, contiene tutti i nodi successivi, e contiene tutti gli insiemi informativi successivi.

Definition

La porzione di strategia che fa riferimento agli information set appartenenti a un sottogioco si chiama strategia di continuazione

Nota: i multi-stage games hanno sempre sottogiochi e quindi il SPNE è "efficace".

Note su SPNE

- Il SPNE è un NE perché l'intero gioco è un sottogioco
- SPNE richiede che i giocatori giochino strategie di continuazione che formano equilibri di Nash in ogni sottogioco, anche in quei sottogiochi che possono essere raggiunti solo in seguito a un errore commesso da un giocatore.

SPNE in un multi-stage game

Theorem

Giocare un NE dello stage game in ogni stage è un SPNE. Quindi un SPNE esiste sempre in un multi-stage game.

Esempio: Bach vs Stravinsky giocato due volte. Quali sono le strategie formalmente? R. (B,SSSS), (B,SSSS)

Strategie dipendenti dalla storia del gioco

Come in tutti i giochi dinamici, nei multi-stage games, le strategie adottare in ogni stage possono dipendere dalla storia passata del gioco

Esempio: considerate il seguente stage-game ripetuto due volte, dove il payoff totale è dato dalla somma dei payoff di ogni stadio (cioè fattore di sconto $\delta = 1$)

	L	M	R
U	0,0	1,1	6,0
M	4,3	0,0	0,0
D	0,6	0,0	5,5

- Ci sono due equilibri di Nash in strategie pure: (M,L), (U,M) with payoffs (4,3), (1,1)
- Nel gioco a due stadi il seguente profilo di strategie è SPNE: "Gioca (D,R) nel primo stadio. Se l'esito del primo stadio è (D,R), allora gioca (M,L) nel secondo stadio. altrimenti gioca (U,M)"

(cont.)

- In ogni sottogioco del secondo stadio, la strategia prescrive di giocare un NE
- Nel sottogioco che inizia nel primo stadio, cioè nell'intero gioco, la matrice dei payoff diventa

	L	M	R
U	+1,+1	1+1,1+1	6+1, +1
M	4+1,3+1	+1, +1	+1, +1
D	1,6+1	+1,+1	5+4,5+3

- Ora (D,R) è un equilibrio di Nash del sottogioco
- Nota: (D,R) non è un equilibrio dello stage stage-game
- Nota: in un multi-stage finito, le strategie che formano un SPNE devono prescrivere di giocare un NE dello stage-game nell'ultimo stadio

Dilemma del prigioniero ripetuto un numero finito di volte

Strategie dipendenti dalla storia possono esistere solo quando lo stage game ha molti equilibri.
Se ogni stage-game ha un solo equilibrio le strategie SPNE devono prescrivere di giocare l'equilibrio di stage game ad ogni stage.
Es. dilemma del prigioniero ripetuto 10 volte con fattore di sconto δ.
Nell'ultimo stage si deve giocare (c., c.). Nel penultimo stage ogni payoff è aumentato di (-3,-3) $->$ quindi la strategia è ancora (c., c.)

Dilemma del prigioniero ripetuto infinitamente

fattore di sconto δ.

- altri esiti del gioco possono essere supportati come SPNE in aggiunta a (c. c.) che rimane SPNE

	n.c.	c.
n.c.	-1,-1	-4,0
c.	0,-4	-3,-3

Esempio: *trigger strategy:* "gioca n.c. nel primo stadio. Continua in questo modo finché un giocatore devia. Dopo ogni deviazione, gioca c. per il resto del gioco"

- Nota: la trigger strategy induce un equilibrio di Nash induces in tutti i sottogiochi, anche quelli che iniziano dopo una deviazione, dove (c., c.) è un NE dello stage game.

(cont.)

Nota:

- La pazienza (cioè alto fattore di sconto) è la chiave per supportare la cooperazione: in giochi infinitamente ripetuti anche piccole punizioni future possono disincentivare la deviazione
- In giochi inifinitamente ripetuti l'insieme dei SPNE può essere molto diverso e tipicamente molto più ampio che nei giochi ripetuti un numero finito di volte

Folk theorem

Theorem

(Friedman, 1971) Dato il gioco ripetuto infinitamente $\Gamma(\delta)$, sia α^* uno equilibrio dello stage-game equilibrium con payoffs e. Allora per ogni payoff v raggiungibile nel nel gioco con $v_i \geqslant e_i$ per ciascun giocatore i, esiste un $\underline{\delta}$ tale che per tutti $\delta > \underline{\delta}$ esite un SPNE di $\Gamma(\delta)$ con payoff v.

- Nota: la prova si basa sull uso di trigger strategies dove la punizione consiste nel giocare α^* dopo ogni deviazione. Se i giocatori sono abbastanza pazienti, tale punizione è efficace. Ovviamente in ogni sottogioco la trigger stragety induce un equilibrio di Nash
- Nota: ma quanti SPNE esitono?
- Nota: strategia tit-for-tat: inizia giocando n.c.; poi nel periodo n gioca quello che ha giocato l'avversario nel periodo n-1. Supponete che un giocatore giochi c. nel periodo n (deviazione). Allora in n+1 l'avversario gioca c, ma contemporaneamente il primo deviante giocherà n.c., la strategia del periodo n dell'altro, "soffrendo molto"