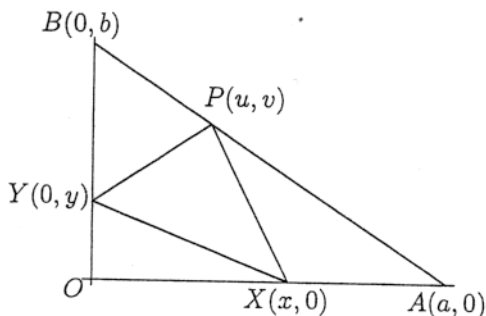


SCUOLA GALILEIANA DI STUDI SUPERIORI
CLASSE DI SCIENZE NATURALI
ANNO ACCADEMICO 2004-2005
PROVA SCRITTA DI MATEMATICA

Risolvere quanti più possibile dei seguenti quesiti. Anche risoluzioni parziali vengono valutate.

ESERCIZIO 1. Sia OAB un triangolo rettangolo in O ; sia P fissato sull'ipotenusa AB , diverso dai vertici A, B . Dimostrare che esistono punti X sul cateto OA ed Y sul cateto OB tali che i triangoli PBY , OXY e XAP abbiano la stessa area. Quante sono tali coppie di punti?



ESERCIZIO 2. Siano α, β, γ gli angoli interni di un triangolo. Dimostrare che si ha

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma > 1.$$

ESERCIZIO 3. In una città di 235.163 abitanti l'età media è di 34,3 anni. Dimostrare che qualunque sia k intero, con $1 \leq k < 235.163$, si possono trovare k abitanti la cui età media è $\geq 34,3$, ed anche k abitanti con età media $\leq 34,3$.

Vale ancora l'affermazione se le ultime due disuguaglianze sono prese in senso stretto? (per età di una persona intendiamo la differenza fra l'anno corrente ed il suo anno di nascita; l'età di una persona è quindi un numero intero)

ESERCIZIO 4. Diciamo *pitagorico* un triangolo rettangolo se le lunghezze dei suoi lati sono numeri interi. Si dimostri che in ogni triangolo rettangolo pitagorico il raggio del cerchio inscritto ha lunghezza intera.

ESERCIZIO 5. Una pulce disorientata salta da un vertice ad un altro del triangolo ABC : quando è in un vertice salta in uno degli altri due con uguale probabilità. Supponendo che la pulce parta dal vertice A , dire se la probabilità che essa sia nuovamente nel vertice A dopo 100 salti è maggiore, minore, od uguale ad $1/3$.

ESERCIZIO 6. Nella cittadina di Emporia nel Kansas le strade sono tutte in direzione est-ovest oppure nord-sud, e la distanza fra strade parallele successive è di 100m. Si vuole andare da un incrocio di strade ad un altro, 1km più a nord e 0,5km più ad est. Quanti possibili percorsi di minima lunghezza esistono fra questi due punti?