

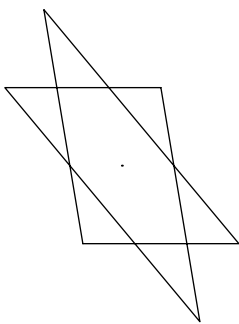
SCUOLA GALILEIANA DI STUDI SUPERIORI
CLASSE DI SCIENZE NATURALI
PROVA SCRITTA DI MATEMATICA E ATTITUDINE SCIENTIFICA

Risolvere quanti più possibile dei seguenti quesiti. Anche risoluzioni parziali vengono valutate.

ESERCIZIO 1. Si ha un filo circolare con cui fare una collana. Ci sono a disposizione due tipi di perle, normali e grandi. La collana è completa con $a > 0$ perle normali e $b > 0$ perle grandi, ed anche con $c > 0$ perle normali e $d > 0$ perle grandi, con a diverso da c . La collana può anche essere riempita con h perle normali; esprimere h mediante a, b, c, d .

ESERCIZIO 2. È dato un triangolo T ; lo si fa ruotare nel suo piano di un angolo piatto attorno al baricentro, ottenendo un triangolo T' . L'unione insiemistica $T \cup T'$ dei due triangoli è un poligono P .

- (a) Nota l'area s di T trovare l'area di P .
- (b) Noto il perimetro p di T trovare il perimetro di P .



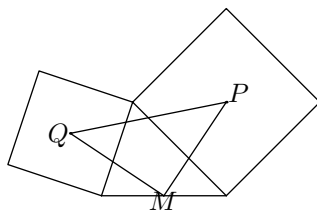
ESERCIZIO 3. In un torneo di calcio ad eliminazione diretta si incontrano otto squadre, fra cui Italia e Brasile. Viene sorteggiato un programma di incontri: le otto squadre si affrontano a due a due, le quattro vincitrici si affrontano in due semifinali, le cui vincitrici giocano la finale. Si sa che Italia e Brasile vincono con probabilità $2/3$ incontrando altre squadre, con probabilità $1/2$ incontrandosi fra loro.

Qual è la probabilità che ci sia una finale Italia–Brasile?

ESERCIZIO 4. Sia $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ l'insieme dei numeri naturali, e sia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ funzione iniettiva. Dimostrare che l'insieme degli y di \mathbb{N} per cui l'equazione $y = f(f(x))$ non ha soluzione nell'incognita x è infinito, oppure ha un numero pari di elementi (si ricorda che una funzione $f : X \rightarrow Y$ fra due insiemi X ed Y si dice iniettiva (o iniettiva) se $f(x_1) = f(x_2)$, con x_1, x_2 in X , implica che $x_1 = x_2$).

ESERCIZIO 5. Nell'isola di Tresette ci sono solo monete da 3 e 7 fiorini. Dire quali prezzi non possono essere pagati a meno di ricevere un resto (si vuole un elenco di tali prezzi). E ricevendo un resto?

ESERCIZIO 6. Dato un triangolo, costruiamo su due suoi lati i quadrati dei lati stessi (nel semipiano opposto a quello che contiene il triangolo). Siano P, Q i centri di tali quadrati, e sia M il punto medio del terzo lato. Dimostrare che il triangolo MPQ è rettangolo ed isoscele.



ESERCIZIO 7. Si ha una pista ciclistica di forma perfettamente circolare, di centro O ; su essa sta girando (per fissare le idee nel verso antiorario) un ciclista a velocità (scalare) costante. Mentre il ciclista transita per il punto A , dallo stesso punto parte, da fermo, un altro ciclista, che viaggia nel verso opposto ad accelerazione (scalare) costante. Dopo un giro essi si incontrano nuovamente in A . Naturalmente essi si sono anche incontrati in un altro punto B ; determinare la misura in radianti dell'angolo \widehat{AOB} .

Padova 14 settembre 2006