Soluzioni

Esercizio 1. Si ha un filo circolare con cui fare una collana. Ci sono a disposizione due tipi di perle, normali e grandi. La collana è completa con $a > 0$ perle normali e $b > 0$ perle grandi, ed anche con $c > 0$ perle normali e $d > 0$ perle grandi, con a diverso da c. La collana può anche essere riempita con h perle normali; esprimere h mediante a, b, c, d.

Risoluzione. Sia u il diametro di una perla normale, v il diametro di una perla grande, l la lunghezza della circonferenza della collana. Si hanno le relazioni

$$a\,u + b\,v = l; \quad c\,u + d\,v = l; \quad h\,u = l.$$

Sottraendo le prime due membro a membro si ottiene $(a-c)\,u + (b-d)\,v = 0$, da cui $v = ((a-c)/(d-b))u$ (chiaramente $d \neq b$, dato che $a \neq c$); sostituendo nella prima si ottiene

$$a\,u + b\frac{a-c}{d-b}\,u = l = h\,u \quad \text{da cui} \quad h = a + b\frac{a-c}{d-b} = \frac{da - ba + ba - bc}{d-b},$$

ed in definitiva

$$h = \frac{ad - bc}{d-b}.$$

□

Esercizio 2. È dato un triangolo T; lo si fa ruotare nel suo piano di un angolo piatto attorno al baricentro, ottenendo un triangolo T'. L'unione insiemistica $T \cup T'$ dei due triangoli è un poligono P.

(a) Nota l'area s di T trovare l'area di P.
(b) Noto il perimetro p di T trovare il perimetro di P.

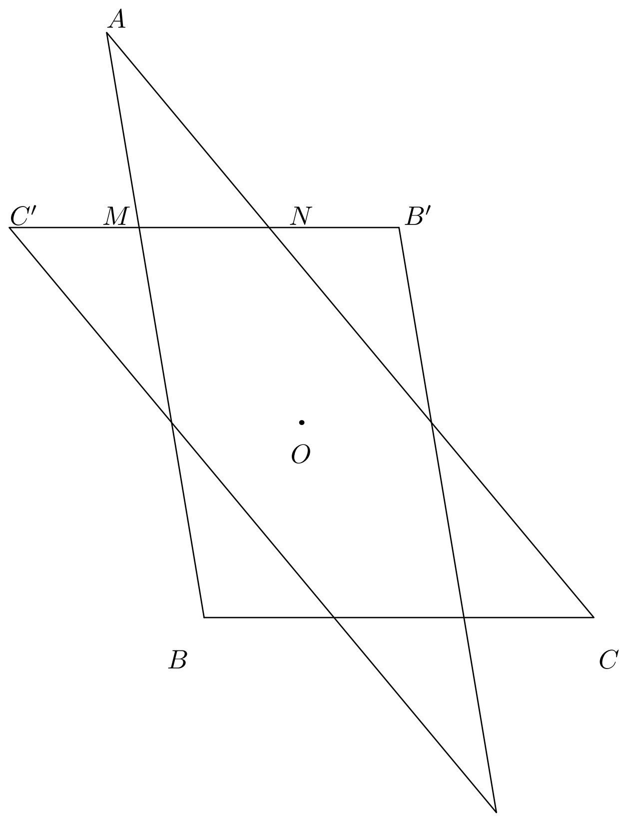


Figura 1. Il poligono P.

Risoluzione. Ricordiamo che il baricentro O di un triangolo divide ogni mediana in due segmenti, in cui quello dal vertice al baricentro è doppio del rimanente pezzo dal baricentro al lato. Dato che la rotazione di un angolo piatto atorno al punto O è la simmetria di centro O, il lato $B'C'$, parallelo al lato BC, divide la mediana di T relativa a BC in due parti di cui la parte dal vertice A al lato $B'C'$ è un terzo del totale. Per il teorema di Talete il parallelismo di $B'C'$ con BC dice che anche AM ed AN sono un terzo dei corrispondenti lati AB e AC; insomma, il triangolo AMN è simile al triangolo ABC, con rapporto di similitudine pari a $1/3$. Lo stesso si può dire ovviamente degli altri sub-triangoli di ABC con vertici B e C, ed anche dei triangoli corrispondenti di T', dato che la situazione di T e T' è assolutamente simmetrica. Dopo di ciò è facile concludere:

Area: il triangolo AMN ha area pari ad $s/9$; i tre sub-triangoli di T sopra discussi hanno allora complessivamente area $3s/9 = s/3$; l'area di P è la somma dell' area di $A'B'C'$, che è s, e dell'area dei tre subtriangoli. Concludendo:

$$\text{Area}(P) = s + \frac{s}{3} = \frac{4}{3}s.$$

Discussione analoga per il perimetro di P: il triangolo AMN ha i lati AM ed AN che sono $1/3$ dei lati AB ed AC rispettivamente. La parte del bordo di P che sta su T ha quindi lunghezza pari a:

$$\frac{1}{3}(|AB| + |AC|) + \frac{1}{3}(|BA| + |BC|) + \frac{1}{3}(|CA| + |CB|) = \frac{2}{3}p,$$

dove p è il perimetro di T. Identica la lunghezza della parte di bordo su T'; quindi il perimetro di P vale $4p/3$. □

Esercizio 3. In un torneo di calcio ad eliminazione diretta si incontrano otto squadre, fra cui Italia e Brasile. Viene sorteggiato un programma di incontri: le otto squadre si affrontano a due a due, le quattro vincitrici si affrontano in due semifinali, le cui vincitrici giocano la finale. Si sa che Italia e Brasile vincono con probabilità $2/3$ incontrando altre squadre, con probabilità $1/2$ incontrandosi fra loro.

Qual è la probabilità che ci sia una finale Italia–Brasile?

Risoluzione. Di fatto le squadre sono divise in due gruppi di quattro squadre, dai cui incontri a due a due escono le due semifinaliste e poi le finaliste; condizione necessaria per una finale Italia–Brasile è che intanto le due squadre siano in gruppi diversi. Se l'Italia è in un gruppo, restano per il Brasile altri sette posti, di cui quattro favorevoli a quanto voluto; intanto, le squadre capitano in gruppi diversi con probabilità $4/7$. Entrambe devono poi vincere i loro incontri, il che avviene con probabilità $(2/3)^2$ per l'Italia e lo stesso per il Brasile, per cui la probabilità finale è

$$\frac{4}{7}\frac{2^2}{3^2}\frac{2^2}{3^2} = \frac{2^6}{7 \cdot 81} = \frac{64}{567}.$$

□

Esercizio 4. Nell'isola di Tresette ci sono solo monete da 3 e 7 fiorini. Dire quali prezzi non possono essere pagati a meno di ricevere un resto (si vuole un elenco di tali prezzi). E ricevendo un resto?

Risoluzione. Senza resto i prezzi che si possono pagare sono della forma $3a + 7b$, con a, b interi ≥ 0. Descriviamo meglio tale insieme. Chiaramente $1, 2$ non ci stanno, e nemmeno $4, 5$. Tutti i multipli di 3 chiaramente ci stanno, e così quelli di 7. Per analizzare i prezzi ottenibili conviene scrivere

$$n = 3q + r, \qquad \text{con } q \geq 0 \text{ intero, } r \text{ intero, } 0 \leq r \leq 2.$$

Se $r = 0$, n multiplo di 3 è prezzo ottenibile. Se $r = 1$, si scrive

$$n = 3q + 1 = 3(q + 2 - 2) + 1 = 3(q - 2) + 7,$$

ottenibile se $q - 2 \geq 0$, e cioè $q \geq 2$; tutti i numeri che sono modulo 3 uguali ad 1 , da 7 in su, sono ottenibili. Infine, se $n = 3q + 2$ si scrive

$$n = 3(q - 4 + 4) + 2 = 3(q - 4) + 14 = 3(q - 4) + 7 \cdot 2,$$

ottenibile se $q \geq 4$, e cioè a partire da 14: anche tutti numeri congrui a 2 modulo 3 che sono maggiori uguali a 14 sono prezzi ottenibili. Restano fuori solo $1, 2, 4, 5, 8, 11$.

È facile vedere che invece se i resti sono ammessi ogni prezzo è ottenibile: essendo $1 = (-2) \cdot 3 + 7$ si ha $n = (-2n) \cdot 3 + 7n$: si può pagare con n monete da 7, ricevendo come resto $2n$ monete da 3. □

Esercizio 5. Sia X insieme, e sia $f : X \to X$ funzione iniettiva. Dimostrare che l'insieme degli y di X per cui l'equazione $y = f(f(x))$ non ha soluzione nell'incognita x, se è finito, ha un numero pari di elementi (si ricorda che una funzione $f : X \to Y$ fra due insiemi X ed Y si dice iniettiva (o ingettiva) se $f(x_1) = f(x_2)$, con x_1, x_2 in X, implica che $x_1 = x_2$).

Risoluzione. Per comprendere la risoluzione qui presentata conviene farsi un diagramma di Venn. Sia Y quest'insieme. Se Y è vuoto, ha zero elementi, e 0 è pari. Supponiamo quindi l'insieme non vuoto. Si noti che allora anche l'equazione $y = f(x)$ non ha soluzione per qualche $y \in X$: altrimenti per ogni y si avrebbe uno ξ (anche unico) con $y = f(\xi)$, e per questo ξ ci sarebbe x tale che $\xi = f(x)$. Tali y formano anch'essi un insieme finito, essendo chiaramente parte degli $y \in Y$. Supponiamo quindi che $\{a_1, \dots, a_n\}$ siano gli y per cui l'equazione $y = f(x)$ non ha soluzione nell'incognita x; affermiamo che si ha esattamente $Y = \{a_1, \dots, a_n, f(a_1), \dots, f(a_n)\}$, e che questi sono $2n$ elementi: infatti gli $f(a_k)$ sono distinti per l'iniettività di f, e sono distinti dagli a_j, dato che $a_j = f(a_k)$ violerebbe la descrizione degli a_j. Se poi l'equazione $f(a_k) = f(f(x))$ avesse soluzione $\bar{x}$, per l'iniettività si avrebbe $a_k = f(\bar{x})$, violando ancora la descrizione degli a_k. Insomma $\{a_1, \dots, a_n, f(a_1), \dots, f(a_n)\} \subseteq Y$. Se poi $\bar{y} \in Y$, ed $\bar{y} \notin \{a_1, \dots, a_n\}$, si ha $\bar{y} = f(\bar{x})$ per un unico $\bar{x}$ di X; se questo non è un a_j, si ha $\bar{x} = f(\xi)$ per un $\xi \in X$, e quindi $\bar{y} = f(f(\xi))$ non sta in Y, contraddicendo l'ipotesi.

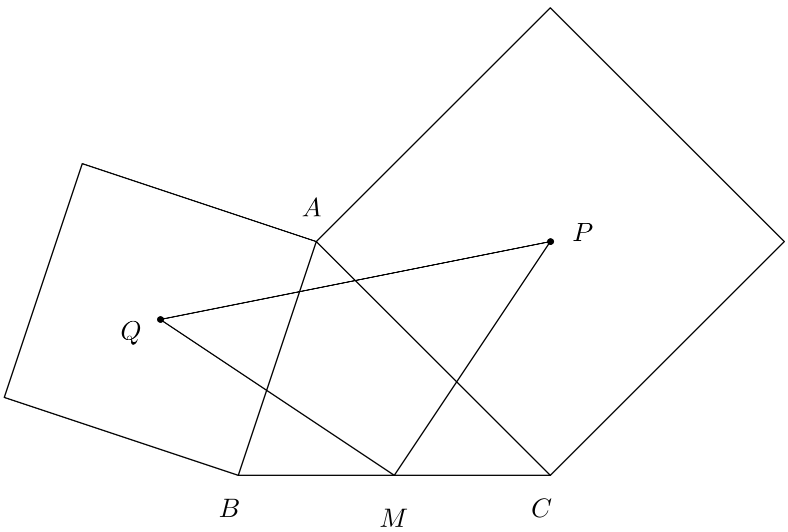
Osservazione. Una risoluzione meno prolissa di quella su svolta, e che porge maggiori informazioni, ma che richiede maggiore dimestichezza con la teoria degli insiemi, può essere svolta come segue. Per ogni funzione $f : X \to X$, essendo $f(f(X)) \subseteq f(X)$ si ha $X \setminus f(f(X)) = (X \setminus f(X)) \cup (f(X) \setminus f(f(X)))$, unione chiaramente disgiunta. Se poi $f : X \to X$ è iniettiva, e $A \subseteq X$, si ha $f(X \setminus A) = f(X) \setminus f(A)$ (la verifica di ciò è immediata), in particolare $f(X \setminus f(X)) = f(X) \setminus f(f(X))$, di modo che $X \setminus f(X)$ e $f(X) \setminus f(f(X))$ hanno lo stesso cardinale. Quindi $X \setminus f(f(X))$, se è finito, ha il doppio degli elementi di $X \setminus f(X)$.

Un esempio di tale situazione è la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ data da $f(x) = a+x$, dove $a \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ è fissato; si ha $\mathbb{N} \setminus f(\mathbb{N}) = \{0, \dots, a-1\}$, e $\mathbb{N} \setminus f(f(\mathbb{N})) = \{0, \dots, 2a-1\}$.

Per induzione, è anche facile vedere che se $f : X \to X$ è iniettiva, m è numero naturale, ed f^m indica la funzione ottenuta iterando m volte la funzione f, allora $X \setminus f^m(X)$, se è finito, ha un numero di elementi che è divisibile per m.

$\square$

Esercizio 6. Dato un triangolo, costruiamo su due suoi lati i quadrati dei lati stessi (nel semipiano opposto a quello che contiene il triangolo). Siano P, Q i centri di tali quadrati, e sia M il punto medio del terzo lato. Dimostrare che il triangolo MPQ è rettangolo ed isoscele.



Risoluzione. (con il calcolo vettoriale elementare) Assumiamo un sistema di coordinate ortonormali con centro $O = M$; si avrà $B = (-a, 0)$, $C = (a, 0)$, con $a > 0$; sia $A = (p, q)$ (con $q > 0$). Il centro Q del quadrato costruito su AB ha come coordinate

$$\frac{A+B}{2} + \frac{(-q, p+a)}{2} = \frac{(p-a-q, p+q+a)}{2};$$

(al punto medio $(A+B)/2$ del segmento AB si somma metà del vettore ottenuto ruotando in verso antiorario il vettore $A-B$; come noto, questo si ottiene scambiando le coordinate, e cambiando poi segno alla prima di esse). Analogamente il centro P del secondo quadrato ha coordinate

$$\frac{A+C}{2}+\frac{(q,a-p)}{2}=\frac{(a+p+q,a-p+q)}{2}.$$

Dobbiamo provare che i due vettori $(p-a-q,p+q+a)/2$ e $(p+q+a,-p+q+a)/2$ sono ortogonali e della stessa lunghezza; e basta notare che il primo si ottiene dal secondo scambiando le coordinate, e cambiando poi il segno alla prima.

Osservazione. La risoluzione può essere facilmente ottenuta anche senza introdurre coordinate (ma servendosi delle stesse idee). Basta introdurre l'operatore lineare R dei vettori piani in se stesso, che ruota i vettori di un angolo retto, in verso positivo nell'orientazione scelta per il piano (verso antiorario nel comune modo di guardare il piano). Si ha allora

$$Q=\frac{A+B}{2}+R\left(\frac{A-B}{2}\right);\quad P=\frac{A+C}{2}+R\left(\frac{C-A}{2}\right);\quad M=\frac{B+C}{2}.$$

Dimostriamo che $Q-M=R(P-M)$, il che conclude la dimostrazione. Si ha:

$$Q-M=\frac{A-C}{2}+R\left(\frac{A-B}{2}\right);\quad P-M=\frac{A-B}{2}+R\left(\frac{C-A}{2}\right);$$

quindi

$$R\left(\frac{A-B}{2}+R\left(\frac{C-A}{2}\right)\right)=R\left(\frac{A-B}{2}\right)+R\circ R\left(\frac{C-A}{2}\right)=R\left(\frac{A-B}{2}\right)+\frac{A-C}{2}=Q-M,$$

ricordando che per ogni vettore piano $\mathbf{u}$ si ha $R\circ R(\mathbf{u})=-\mathbf{u}$.

□

Padova 14 settembre 2006