SCUOLA GALILEIANA DI STUDI SUPERIORI — CLASSE DI SCIENZE NATURALI

ESAME DI AMMISSIONE, SOLUZIONE PROVA DI MATEMATICA

Esercizio 1. Sia X un insieme di cardinalità $n \in \mathbb{N}$. Quante sono le coppie (Y, Z), dove Y e Z sono sottoinsiemi di X, tali che $Y \cap Z = \emptyset$ (insieme vuoto)?

Soluzione — Sono 3^n. Infatti c'è chiaramente una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\{1, 2, 3\}^X$ di tutte le applicazioni di X in $\{1, 2, 3\}$ e l'insieme $\{\,(Y, Z) \mid Y, Z \subseteq X,\ Y \cap Z = \emptyset\,\}$ che associa ad ogni funzione $f \colon X \to \{1, 2, 3\}$ la coppia $(f^{-1}(1), f^{-1}(2))$. ■

Esercizio 2. Siano a, m e n numeri naturali strettamente maggiori di 1.

i) Si dimostri che se $p = a^m - 1$ è un numero primo, allora $a = 2$ e m è primo.

ii) Si dimostri che se $q = a^n + 1$ è un numero primo, allora a è pari e $n = 2^r$ con r naturale.

Soluzione — i) Poiché

$$p = a^m - 1 = (a - 1)(a^{m-1} + a^{m-2} + \cdots + a + 1)$$

è un numero primo e il secondo fattore è strettamente più grande di 1, deve essere $a - 1 = 1$, cioè $a = 2$. Supponiamo per assurdo che $n = rs$ con $r, s > 1$ interi. Allora

$$p = 2^m - 1 = 2^{rs} - 1 = (2^r - 1)(2^{r(s-1)} + 2^{r(s-2)} + \cdots + 2^r + 1),$$

con entrambi i fattori strettamente più grandi di 1, che, essendo p primo, è assurdo.

ii) Il numero a deve essere pari, altrimenti q sarebbe pari e non potrebbe essere primo. Supponiamo per assurdo che $n = lk$ con $k > 1$ dispari. Allora

$$q = a^n + 1 = a^{lk} + 1 = (a^l + 1)\,(a^{l(k-1)} - a^{l(k-2)} + \cdots - a^l + 1).$$

Evidentemente il primo fattore è strettamente più grande di 1. Poiché $k \geqslant 3$ e $a > 1$ anche il secondo fattore è strettamente più grande di 1, contraddicendo l'ipotesi che q sia primo. ■

Esercizio 3. Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ e siano $0 < x_1 < \ldots < x_n < 1$. Si dimostri che esiste un $x \in [0, 1]$ tale che la media aritmetica delle distanze di x da x_k, $k = 1, \ldots, n$ è $\frac{1}{2}$. In altre parole

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x - x_k| = \frac{1}{2}.$$

Quanti di tali x con la proprietà suddetta esistono?

Soluzione — Prima parte: Consideriamo la funzione

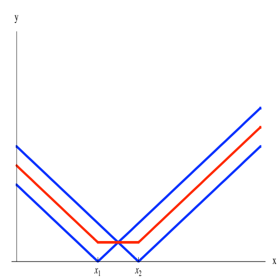
$$f : [0,1] \longrightarrow [0,1], \quad f(x) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x - x_k|.$$

Chiaramente f è continua. Inoltre

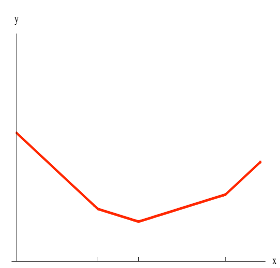
$$f(0) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \quad f(1) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1 - x_k) = 1 - f(0), \quad \Longrightarrow \quad f(0) + f(1) = 1.$$

Se $f(0) = \frac{1}{2}$ la conclusione è ovvia, altrimenti $f(0) > \frac{1}{2}$ o $f(0) < \frac{1}{2}$. Se $f(0) > \frac{1}{2}$ allora $f(1) < \frac{1}{2}$ per cui la conclusione segue dal teorema dei valori intermedi. Idem se $f(0) < \frac{1}{2}$ (allora $f(1) > \frac{1}{2}$). Con ciò è provata l'esistenza.

Seconda parte: Possiamo capire l'andamento della funzione f con semplici considerazioni grafiche. Cominciamo con caso in cui i punti siano 2, $0 < x_1 < x_2 < 1$. I grafici delle funzioni $x \longmapsto |x - x_1|$ e $x \longmapsto |x - x_2|$ sono ben noti. È immediato osservare che il grafico della somma è una spezzata, con pendenza -2 per $x < x_1$, pendenza 0 per $x_1 < x < x_2$ e pendenza 2 per $x > x_2$.



Aggiungendo un terzo punto $0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1$ si ha comunque una spezzata le cui pendenze variano, rispetto alla precedente, di -1 per $x < x_3$ e di $+1$ per $x > x_3$ e quindi saranno $-3, -1, 1, 3$ rispettivamente negli intervalli $[0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ e $[x_3, 1]$.



È dunque evidente che iterando il procedimento si otterranno spezzate via via con pendenze sui vari intervalli $-4, -2, 0, 2, 4$ (4 punti), $-5, -3, -1, 1, 3, 5$ (5 punti), etc. In ogni caso si osserva che il grafico di f è decrescente fino ad un certo x_k, poi o cresce strettamente (caso n dispari) o è piatto tra x_k ed x_{k+1} e cresce strettamente da $k+1$ in poi. Allora, se ad es. $f(0) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k < \frac{1}{2}$ esiste un solo x tale che $f(x) = \frac{1}{2}$, e similmente se $f(0) > \frac{1}{2}$ (perché $f(1) < \frac{1}{2}$). Il caso in cui $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$ è l'unico in cui 0 e 1 sono due soluzioni. ■

Esercizio 4. Sia $f\colon A \to B$ un'applicazione tra due insiemi.

i) Si dimostri che l'applicazione f è iniettiva se e solo se, per ogni coppia di sottoinsiemi X e Y di A tali che $X \cap Y = \emptyset$, si ha $f(X) \cap f(Y) = \emptyset$.

ii) Si dimostri che l'applicazione f è iniettiva se e solo se per ogni coppia di sottoinsiemi X e Y di A si ha $f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$.

Soluzione — i) Siano f iniettiva, $X, Y \subseteq A$ e $X \cap Y = \emptyset$. Supponiamo per assurdo che $f(X) \cap f(Y) \neq \emptyset$. Allora esistono $x \in X$ e $y \in Y$ tali che $f(x) = f(y)$. Dato che f è iniettiva, ne segue che $x = y$. Quindi $x = y \in X \cap Y$, assurdo perché $X \cap Y = \emptyset$.

Viceversa supponiamo che, per ogni coppia di sottoinsiemi X e Y di A tali che $X \cap Y = \emptyset$, si abbia $f(X) \cap f(Y) = \emptyset$. Mostriamo che f è iniettiva. Siano $a, a' \in A$ tali che $f(a) = f(a')$. Allora posto $X = \{a\}$ e $Y = \{a'\}$, si ha $f(a) = f(a') \in f(X) \cap f(Y)$. In particolare, $f(X) \cap f(Y) \neq \emptyset$. In base alla nostra ipotesi deve quindi essere $X \cap Y \neq \emptyset$, cioé $a = a'$.

ii) Supponiamo che f sia iniettiva. Fissiamo due sottoinsiemi X e Y di A. Mostriamo che $f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$. Sia $b \in f(X \setminus Y)$. Allora $b \in f(X)$. Supponiamo per assurdo che $b \in f(Y)$. Allora $b = f(x)$ per qualche $x \in X \setminus Y$ e $b = f(y)$ per qualche $y \in Y$. Dato che f è iniettiva, $f(x) = b = f(y)$ implica $x = y$, impossibile perchè $x \notin Y$ e $y \in Y$. Pertanto $b \notin f(Y)$. Ma allora $b \in f(X) \setminus f(Y)$. Questo dimostra che $f(X \setminus Y) \subseteq f(X) \setminus f(Y)$. Per dimostrare l'inclusione opposta, sia $b \in f(X) \setminus f(Y)$. Allora $b = f(x)$ per qualche $x \in X$, e $f(x) \notin f(Y)$. In particolare, $x \notin Y$. Ma allora $x \in X \setminus Y$, e $b = f(x) \in f(X \setminus Y)$.

Viceversa, supponiamo che per ogni coppia di sottoinsiemi X e Y di A si abbia $f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$, e dimostriamo che f è iniettiva. Siano $a, a' \in A$ tali che $f(a) = f(a')$. Allora, posto $X = \{a\}$ e $Y = \{a'\}$, si ha $f(\{a\} \setminus \{a'\}) = f(\{a\}) \setminus f(\{a'\})$. Ma $f(\{a\}) \setminus f(\{a'\} = \{f(a)\} \setminus \{f(a')\} = \emptyset$. Quindi $f(\{a\} \setminus \{a'\}) = \emptyset$, da cui $\{a\} \setminus \{a'\}$. Se ne deduce che $a = a'$. ■

Esercizio 5. Un fascio di luce laser è fissato ad un supporto circolare C di raggio 1 e centrato nell'origine del piano. Il fascio di luce ha origine dal punto di coordinate $(x, y) = (1, 0)$ ed è diretto tangenzialmente a C, puntando nella direzione del semipiano $\{y > 0\}$. Il supporto C può ruotare attorno all'origine. Si calcoli di che angolo deve ruotare il supporto C perchè il fascio di luce colpisca un punto di coordinate (x, y), con $x > 1$ e $y > 0$.

Soluzione — La rotazione desiderata di C si ottiene quando il fascio (tangente a C) colpisce il punto (x, y). Se l'origine del fascio è parametrizzata con le coordinate

$$(\cos\theta, \sin\theta),$$

il punto (x, y) viene colpito quando esso giace sulla retta tangente

$$\{(\cos\theta, \sin\theta) + s(-\sin\theta, \cos\theta) \ : \ s \in \mathbb{R}\}.$$

Risolviamo dunque in (s, θ) il sistema

$$(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta) + s(-\sin\theta, \cos\theta). \quad (\star)$$

Per il teorema di Pitagora si ha che $s^2 = x^2 + y^2 - 1$. Tramite calcoli elementari, l'equazione nelle x in $(\star)$ allora fornisce la soluzione

$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{\sqrt{x^2+y^2-1}-xy}{y^2-1} & \text{per } y \neq 1; \\ \arctan \frac{1-x^2}{2x} & \text{per } y = 1. \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Esercizio 6. Un tetraedro si trova appoggiato su un piano con una certa faccia, gli viene dato un colpo e comincia a rotolare. Il rotolamento avviene per facce successive, tutte equiprobabili.

i) Si calcoli la probabilità q_n che il tetraedro torni a poggiare sulla faccia iniziale esattamente dopo n rotolamenti (e non prima).

ii) Si calcoli la probabilità p_n che dopo n rotolamenti il tetraedro torni a poggiare sulla faccia iniziale. È possibile che tale probabilità sia nulla?

iii) Si calcoli il tempo medio entro il quale il tetraedro torna a poggiare sulla faccia iniziale (suggerimento: può essere utile sapere che $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ per $|x| < 1\ldots$).

Soluzione — i) Chiaramente $q_0 = 1$, $q_1 = 0$, $q_2 = \frac{1}{3}$. Affinché il tetraedro torni nella faccia iniziale esattamente all'$n-$esimo rotolamento bisogna che fino all'$n-1$ esimo rotolamento rimanga nelle altre tre facce. Dopo il primo rotolamento la cosa è certa, per i rimanenti $n-2$ rotolamenti ogni volta si ha la probabilità di $\frac{2}{3}$ quindi, complessivamente la probabilità che fino all'$n-1$ esimo rotolamento il tetraedro non sia nella faccia desiderata è $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$. Quindi

$$q_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \frac{1}{3}.$$

ii) Chiaramente $p_0 = 1$, $p_1 = 0$, $p_2 = \frac{1}{3}$. Chiamiamo p_n la probabilità desiderata. Al passo $n+1$ avremo

$$
\begin{aligned}
p_{n+1} &= \frac{1}{3} \times \text{Prob. al passo } n \text{ la faccia non sia quella iniziale} + 0 \times \text{Prob. al passo } n \text{ la faccia sia quella iniziale} \\
&= \frac{1}{3}(1-p_n) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}p_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{3}(1-p_{n-1}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2}p_{n-1} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^3}p_{n-2} \\
&\vdots \\
&= -\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{3}\right)^k + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\frac{1}{3} = -\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{3}\right)^k - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = -\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^k.
\end{aligned}
$$

Ricordato che $\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ se $q \neq 1$ abbiamo

$$
p_{n+1} = -\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^k + 1 = -\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{3}} + 1 = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{1}{4}.
$$

Si vede subito che $p_n = 0$ sse $n = 1$.

iii) Dobbiamo calcolare

$$
\begin{aligned}
T_{medio} &= \sum_{n=0}^{\infty} n q_n = \sum_{n=2}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} - 1\right) = 4. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Esercizio 7.

i) Si dimostri che per ogni numero naturale $h \geqslant 1$ si ha

$$
1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + h \cdot h! = (h+1)! - 1.
$$

ii) Si dimostri che ogni numero naturale n può essere scritto nella forma $n = c_1 \cdot 1! + c_2 \cdot 2! + c_3 \cdot 3! + \cdots + c_h \cdot h!$, dove $h, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_h$ sono numeri naturali e $c_i \leqslant i$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, h$.

iii) Si dimostri le scrittura in ii) è essenzialmente unica nel senso seguente: se $n = c_1 \cdot 1! + c_2 \cdot 2! + c_3 \cdot 3! + \cdots + c_h \cdot h! = d_1 \cdot 1! + d_2 \cdot 2! + d_3 \cdot 3! + \cdots + d_\ell \cdot \ell!$, dove $h, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_h, \ell, d_1, d_2, d_3, \ldots, d_\ell$ sono numeri naturali $c_i \leqslant i$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, h$, $d_j \leqslant j$ per ogni $j = 1, 2, \ldots, \ell$ e $h \leqslant \ell$, allora $c_i = d_i$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, h$ e $d_j = 0$ per ogni $j = h+1, h+2, \ldots, \ell$.

Soluzione — i) Induzione su h. Per $h = 1$ si ha l'identità banale $1 \cdot 1! = 2! - 1$. Se l'identità è vera per h, allora per $h + 1$ si ha $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + (h+1) \cdot (h+1)! = (h+1)! - 1 + (h+1) \cdot (h+1)! = (h+2) \cdot (h+1)! - 1 = (h+2)! - 1$, come desiderato.

ii) Induzione su n. Per $n = 0$ si ha $n = 0 \cdot 1!$. Sia $n > 0$ e supponiamo l'asserto (b) vero per i numeri naturali minori di n. Dato che la successione $1!, 2!, 3!, \dots$ è strettamente crescente, esiste un (unico) numero naturale h con $h! \leq n < (h+1)!$. Dividendo n per $h!$ si trovano un quoto c_h e un resto r, ossia due numeri naturali c_h, r con $n = c_h \cdot h! + r$ e $r < h!$. Quindi $r < n$ e si può applicare ad r l'ipotesi induttiva: r si può scrivere nella forma $r = c'_1 \cdot 1! + c'_2 \cdot 2! + c'_3 \cdot 3! + \cdots + c'_\ell \cdot \ell!$, dove $\ell, c'_1, c'_2, c'_3, \dots, c'_\ell$ sono numeri naturali e $c'_i \leqslant i$ per ogni $i = 1, 2, \dots, \ell$. Inoltre si può chiaramente supporre che ℓ sia minimo con tale proprietà, per cui in particolare $c'_\ell \geqslant 1$. Ma allora $\ell < h$, perché se fosse $\ell \geqslant h$, allora $r = c'_1 \cdot 1! + c'_2 \cdot 2! + c'_3 \cdot 3! + \cdots + c'_\ell \cdot \ell! \geqslant \ell! \geqslant h!$, contraddizione perché $r < h!$. Se ne conclude che $n = c'_1 \cdot 1! + c'_2 \cdot 2! + c'_3 \cdot 3! + \cdots + c'_\ell \cdot \ell! + c_h \cdot h!$ è la scrittura richiesta in (b) per n.

iii) Supponiamo per assurdo che esistano dei numeri naturali che si possano scrivere in questa forma in due modi essenzialmente distinti. Sia n il più piccolo di tali numeri. Siano $h, c_1, c_2, c_3, \dots, c_h, \ell, d_1, d_2, d_3, \dots, d_\ell$ numeri naturali tali che $n = c_1 \cdot 1! + c_2 \cdot 2! + c_3 \cdot 3! + \cdots + c_h \cdot h! = d_1 \cdot 1! + d_2 \cdot 2! + d_3 \cdot 3! + \cdots + d_\ell \cdot \ell!$, $c_i \leqslant i$ per ogni $i = 1, 2, \dots, h$ e $d_j \leqslant j$ per ogni $j = 1, 2, \dots, \ell$. Si osservi che $n > 0$, in quanto l'unico modo di scrivere 0 in questa forma è con tutti i $c_i = 0$; inoltre si può evidentemente assumere senza perdita di generalità che $c_h \neq 0$, che $d_\ell \neq 0$ e che $h \leqslant \ell$.
Se $h < \ell$, allora $n = c_1 \cdot 1! + c_2 \cdot 2! + c_3 \cdot 3! + \cdots + c_h \cdot h! \leqslant 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + h \cdot h! = (h+1)! - 1$ per la parte (a), e $n = d_1 \cdot 1! + d_2 \cdot 2! + d_3 \cdot 3! + \cdots + d_\ell \cdot \ell! \geqslant d_\ell \cdot \ell! \geqslant \ell! \geqslant (h+1)!$, e questa è una contraddizione.

Deve quindi essere $h = \ell$. Ma allora $n - h! = c_1 \cdot 1! + c_2 \cdot 2! + c_3 \cdot 3! + \cdots + (c_h - 1) \cdot h! = d_1 \cdot 1! + d_2 \cdot 2! + d_3 \cdot 3! + \cdots + (d_\ell - 1) \cdot \ell!$ è un numero naturale minore di n che può essere scritto nella forma voluta in due modi essenzialmente distinti, e questo contraddice la minimalità della scelta di n. ∎