Ammissione alla Scuola Galileiana di Studi Superiori – A.A. 2006/07

Soluzioni dei problemi di Fisca

Problema 1. Sia l'astronave che l'astronauta compiono un moto circolare uniforme attorno alla terra, con la stessa velocità angolare ω. Su entrambi agiscono la tensione della fune e la forza gravitazionale della terra, la cui somma vettoriale deve dare luogo alle rispettive forze centripete. Chiamando m_N la massa dell'astronave e T la tensione della fune deve valere,

$$\begin{aligned} G\frac{Mm_N}{R^2} - T &= m_N\,\omega^2 R, \\ G\frac{Mm}{(R+l)^2} + T &= m\,\omega^2(R+l). \end{aligned}$$

Eliminando ω si ottiene,

$$T = GM\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{(R+l)^3}\right)\Big/\left(\frac{1}{m_N R} + \frac{1}{m(R+l)}\right).$$

Siccome $m_N \gg m$ e $R \gg l$ si ha,

$$\frac{1}{R^3} - \frac{1}{(R+l)^3} \approx \frac{3R^2 l}{R^3(R+l)^3} \approx \frac{3l}{R^4}; \quad \frac{1}{m_N R} + \frac{1}{m(R+l)} \approx \frac{1}{R}\,\frac{m+m_N}{m\,m_N} \approx \frac{1}{mR}.$$

Di conseguenza $T \approx 3mMGl/R^3 \approx 0.05N < T_{max} = 1N$, e l'astronauta resta legato all'astronave.

Problema 2. All'equilibrio per ciascuna delle due sferette la tensione della fune $\vec{T}$, che forma un angolo di $\vartheta = 30^o$ con la verticale, deve bilanciare la forza elettrostatica e la forza peso, ovverosia,

$$T\,sen\vartheta = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\,l^2}, \quad T\,cos\vartheta = mg.$$

Eliminando T si ottiene $q^2 = 4\pi\varepsilon_0\,mg\,l^2\sqrt{3}/3$.

Se la distanza tra le sferette si riduce a $l/2$, all'equilibrio le funi formano un angolo ϑ_1 con la verticale, che viene determinato dalle equazioni,

$$T_1\,sen\vartheta_1 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\,(l/2)^2}, \quad T_1\,cos\vartheta_1 = mg.$$

Si ottiene $tg\vartheta_1 = q^2/[4\pi\varepsilon_0\,mg\,(l/2)^2] = 4\sqrt{3}/3$, dove si è utilizzato il valore della carica ottenuto nel punto precedente. L'energia E spesa dal motore per avvolgere i due fili eguaglia la somma degli aumenti dell'energia potenziale elettrostatica e di quella della forza peso. Siccome le quote verticali delle sferette prima e dopo l'avvolgimento valgono rispettivamente $y = l/2\, ctg\, \vartheta$ e $y_1 = l/4\, ctg\, \vartheta_1$, si ottiene,

$$E = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(l/2)} - \frac{1}{l}\right) + 2mg\left(\frac{l}{2}\, ctg\, \vartheta - \frac{l}{4}\, ctg\, \vartheta_1\right) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\, l} + \frac{7}{8}\sqrt{3}mg\, l = \frac{29}{24}\sqrt{3}mg\, l.$$

Se si recidono i fili le sferette si mettono in moto lungo la direzione dell'accelerzione iniziale che, per l'equazione di Newton, coincide con la direzione della forza totale. Dato che la somma vettoriale della forza elettrostatica e della forza peso inizialmente è antiparallela alla tensione della fune, le sferette si mettono dunque in moto lungo la direzione che forma l'angolo $\vartheta_1 = arctg\frac{4\sqrt{3}}{3}$ con la verticale.

Problema 3. Un fotone che viene emesso dal sole con una data energia raggiunge la terra con un'energia minore a causa del lavoro che esso deve compiere contro il campo gravitazionale del sole. La diminuzione può essere quantificata se nell'energia potenziale associata al campo gravitazionale del sole, $-GMm/r$, dove M è la massa del sole, si sostituisce la massa m del corpo con la sua energia relativistica secondo la formula di Einstein, $m \to E/c^2$. Per un fotone di frequenza ν questo equivale alla sostituzione $m \to h\nu/c^2$. L'energia potenziale gravitazionale del fotone quando si trova a una distanza r dal sole diventa quindi $-GMh\nu/r\, c^2$. Indicando con ν_1 la frequenza del fotone quando arriva sulla terra, possiamo uguagliare l'energia "meccanica" che il fotone possiede sulla superficie del sole a quella che possiede quando arriva sulla terra,

$$h\nu_0 - \frac{GMh\nu_0}{R\, c^2} = h\nu_1 - \frac{GMh\nu_1}{R_{ST}\, c^2},$$

dove R è il raggio del sole e R_{ST} è la distanza tra terra e sole. Siccome $R_{ST} \gg R$ l'ultimo termine dell'equazione può essere trascurato e per la diminuzione relativa della frequenza si ottiene,

$$\frac{\nu_0 - \nu_1}{\nu_0} = \frac{GM}{R\, c^2} = 2.12 \cdot 10^{-6}.$$

Per un corpo massivo la velocità di fuga dalla superficie del sole è determinata dalla condizione $1/2m\, v^2 - MGm/R = 0$, che dà $v_m = \sqrt{2MG/R}$. Se il corpo ha velocità iniziale $2v_m$ la sua energia cinetica vale $E_k = 1/2m(2v_m)^2 = 4MGm/R$, mentre la diminuzione della stessa quando il corpo arriva sulla terra è data dalla differenza di energia potenziale, $\Delta E_k = MGm/R - MGm/R_{ST} \approx MGm/R$. Ne risulta $\Delta E_k/E_k = 1/4$.

Problema 4. Se la pallina percorre il trentesimo parallelo il raggio che congiunge la pallina con il centro del mappamondo forma un angolo $\alpha = 60^o$ con la verticale. Le forze a cui è soggetta la pallina sono la forza peso e la reazione vincolare Φ esercitata dal mappamondo, ortogonale allo stesso. Il moto in questione è possibile se la componente orizzontale della reazione vincolare dà luogo all'accelerazione centripeta, e se la sua componente verticale bilancia la forza peso,

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{R\, sen\alpha} &= \Phi\, sen\alpha, \\ mg &= \Phi\, cos\alpha. \end{aligned}$$

Risulta $v^2 = g\, R\, sen^2\alpha/cos\alpha$, cioè, $v = \sqrt{\frac{3}{2}gR}$.

Dalla conservazione dell'energia, $1/2mv_S^2 = 1/2mv_N^2 + 2mgR$, si determina la velocità della pallina al polo nord in termini della sua velocità al polo sud, cioè $v_N^2 = v_S^2 - 4gR$. Certamente dovrà valere $v_S > \sqrt{4gR}$. Tuttavia, la pallina riesce a raggiungere il polo nord solo se la reazione vincolare in questo punto è positiva, $\Phi_N > 0$. Tenendo conto della forza centripeta si ha $\Phi_N = mv_N^2/R - mg = mv_S^2/R - 5mg$, e quindi deve essere $v_S > \sqrt{5gR}$.

La forza che la pallina esercita sul mappamondo è uguale ed opposta alla reazione vincolare Φ. Siccome al polo sud la forza centripeta vale $mv_S^2/R = \Phi_S - mg$, la condizione che il mappamondo non venga perforato diventa $\Phi_S = mv_S^2/R + mg < 3N$, e la velocità massima che la pallina può avere al polo sud risulta,

$$v_S = \sqrt{\frac{R}{m}(3N - mg)}.$$

Problema 5. La potenza media $\mathcal{P}$ emessa dal laser si ottiene moltiplicando la sezione Σ per l'intensità dell'onda piana,

$$\mathcal{P} = \frac{c\, \varepsilon_0\, E_0^2}{2}\, \Sigma.$$

Siccome l'onda piana si propaga nella direzione delle x positive la sonda rincula lungo l'asse delle x negative. L'accelerazione di rinculo si deriva dalla conservazione della quantità di moto. In un tempo infinitesimo Δt il laser emette l'energia $\mathcal{P}\Delta t$ e la quantità di moto $\Delta p_l = \mathcal{P}\Delta t/c$. Nello stesso tempo la velocità della sonda varia di Δv, e la sua quantità di moto varia quindi di $\Delta p_s = M\Delta v$. Ponendo $\Delta p_l = \Delta p_s$ si trova l'accelerazione della sonda,

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_0\, E_0^2\, \Sigma}{2M}.$$

In un'onda piana il campo magnetico è ortogonale a $\vec{E}$ e alla direzione di propagazione, ed ha modulo $|\vec{B}| = |\vec{E}|/c$. Nel presente caso si ha $B_z = (E_0/c)sen[k(x - ct)]$, $B_y = B_x = 0$.

Problema 6. Siccome la parete può scorrere senza attrito all'equilibrio le pressioni nelle due sezioni sono uguali. Indicando con V_A, V_B e V'_A, V'_B i volumi dei gas rispettivamente prima e dopo il processo, e con p e p' le loro pressioni prima e dopo lo stesso, le equazioni di stato danno,

$$pV_A = RT_0, \tag{1}$$

$$pV_B = 2RT_0, \tag{2}$$

$$p'V'_A = RT, \tag{3}$$

$$p'V'_B = 2RT_0. \tag{4}$$

Dalle equazioni (2) e (4) segue $V'_B/V_B = p/p'$. D'altra parte sommando la (1) alla (2) e la (3) alla (4), e indicando il volume totale con V, si ottiene $pV = 3RT_0$ e $p'V = R(T + 2T_0)$. Dal rapporto di queste due equazioni si ottiene,

$$\frac{V'_B}{V_B} = \frac{p}{p'} = \frac{3T_0}{T + 2T_0} = \frac{9}{10}.$$

Applicando il primo principio della Termodinamica a ciascun gas si ha $\Delta U_A = Q_A - W_A$, $\Delta U_B = Q_B - W_B$. Siccome la trasformazione è reversibile si ha $W_A = -W_B$, e inoltre $\Delta U_B = 0$ perché la temperatura del gas B non cambia. Pertanto il calore totale scambiato vale $Q_A + Q_B = \Delta U_A + \Delta U_B = \Delta U_A = \frac{3}{2}R(T - T_0)$.

Il calore scambiato dal gas B equivale al lavoro compiuto dallo stesso gas,

$$Q_B = W_B = \int_{V_B}^{V'_B} p\, dV = \int_{V_B}^{V'_B} \frac{2RT}{V}\, dV = 2RT \ln \frac{V'_B}{V_B} = 2RT \ln \frac{9}{10},$$

e risulta quindi ceduto.