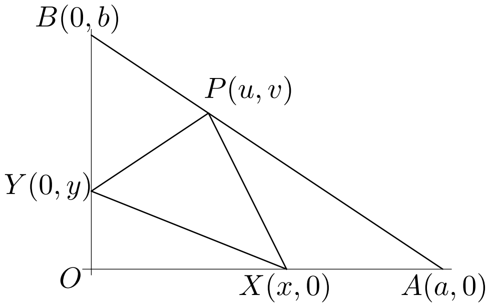
Soluzione dei problemi.

Esercizio 1. Sia OAB un triangolo rettangolo in O; sia P fissato sull'ipotenusa AB, diverso dai vertici A, B. Dimostrare che esistono punti X sul cateto OA ed Y sul cateto OB tali che i triangoli PBY, OXY e XAP abbiano la stessa area. Quante sono tali coppie di punti?

Risoluzione. Il sistema di coordinate indicato è centrato in O. Si ha la relazione $u/a + v/b = 1$; il triangolo PBY ha area $(b - y)u/2$, OXY ha area $xy/2$ e XAP ha area $(a - x)v/2$.



Si tratta pertanto di mostrare che il sistema

$$\begin{cases} (b-y)u = xy \\ (a-x)v = xy \end{cases},$$

ha soluzioni (x, y) tali che $0 < x < a$, $0 < y < b$, e di discutere il numero di tali soluzioni. Dalla seconda si ricava $x = av/(y + v)$; sostituendo nella prima si ottiene

$$(b-y)u = \frac{avy}{y+v} \iff buy + buv - uy^2 - uvy = avy \iff y^2 + \frac{av + uv - bu}{u} y - bv = 0.$$

Essendo $-bv < 0$ si nota che le radici di tale equazione sono reali e di segno opposto; inoltre il polinomio $y^2 + ((av + uv - bu)/u)y - bv$ vale $-bv < 0$ per $y = 0$, e vale invece

$$\frac{abv}{u} > 0$$

per $y = b$; la radice positiva sta quindi fra 0 e b. Come sopra visto per tale radice $\bar{y}$ si ha il corrispondente $\bar{x}$:

$$\bar{x} = a\frac{v}{\bar{y}+v}; \quad \text{quindi} \quad 0 < \bar{x} < a, \quad \text{essendo} \quad 0 < \frac{v}{\bar{y}+v} < 1.$$

Quindi la soluzione richiesta esiste ed è unica. □

Esercizio 2. Siano α, β, γ gli angoli interni di un triangolo. Dimostrare che si ha

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > 1.$$

Risoluzione. Si ha $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$; quindi la disuguaglianza proposta equivale a

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) > 1 \iff \cos\alpha + \cos\beta > 1 + \cos(\alpha+\beta) = 2\cos^2((\alpha+\beta)/2).$$

La formula di prostaferesi dice che si ha $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos((\alpha+\beta)/2)\cos((\alpha-\beta)/2)$; la relazione da dimostrare equivale quindi a

$$\cos((\alpha+\beta)/2)\cos((\alpha-\beta)/2) > \cos^2((\alpha+\beta)/2);$$

si noti ora che essendo $0 < \alpha + \beta < \pi$ si ha $0 < (\alpha + \beta)/2 < \pi/2$ e quindi $\cos((\alpha + \beta)/2) > 0$; la relazione precedente equivale quindi a

$$\cos((\alpha-\beta)/2) > \cos((\alpha+\beta)/2),$$

Non è restrittivo supporre che sia $\alpha \geq \beta$; ne segue $0 \leq (\alpha-\beta)/2 < (\alpha+\beta)/2 < \pi/2$, e per la decrescenza della funzione cos nell'intervallo $[0, \pi/2]$ si conclude.

Risoluzione alternativa Si poteva anche procedere nel modo seguente:

$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > 1 \iff \cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) > 1 \iff$

$-\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta > 1 - \cos\alpha - \cos\beta \iff \sin\alpha\sin\beta > 1 - \cos\alpha - \cos\beta + \cos\alpha\cos\beta =$

$(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)$

Si osservi opra che essendo $0 < \alpha, \beta < \pi$ si ha $0 < \sin\alpha, \sin\beta$ ed anche $0 < 1-\cos\alpha, 1-\cos\beta$; la disuguaglianza precedente equivale quindi a quella che si ottiene quadrando ambo i membri:

$\sin^2\alpha\sin^2\beta > (1-\cos\alpha)^2(1-\cos\beta)^2 \iff (1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta) > (1-\cos\alpha)^2(1-\cos\beta)^2$;

si possono dividere ambo i membri per $(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta) > 0$, ottenendo

$$(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta) > (1-\cos\alpha)(1-\cos\beta) \iff$$
$$1 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\alpha\cos\beta > 1 - \cos\alpha - \cos\beta + \cos\alpha\cos\beta,$$

equivalente a

$$\cos\alpha + \cos\beta > 0.$$

Non è restrittivo supporre che γ sia l'eventuale angolo ottuso; si ha cioè $0 < \alpha \leq \pi/2$, ed anche $0 < \beta \leq \pi/2$, e l'uguaglianza vale in al più un caso; si ha quindi $\cos\alpha \geq 0$, $\cos\beta \geq 0$, una almeno delle due disuguaglianze essendo stretta; quindi $\cos\alpha + \cos\beta > 0$, come voluto. □

Esercizio 3. In una città di 235.163 abitanti l'età media è di $34,3$ anni. Dimostrare che qualunque sia k intero, con $1 \leq k < 235.163$, si possono trovare k abitanti la cui età media è $\geq 34,3$, ed anche k abitanti con età media $\leq 34,3$.

Vale ancora l'affermazione se le ultime due disuguaglianze sono prese in senso stretto? (per età di una persona intendiamo la differenza fra l'anno corrente ed il suo anno di nascita; l'età di una persona è quindi un numero intero)

Risoluzione. Useremo la seguente proprietà della media, di dimostrazione immediata:

La media aritmetica di un'$n-$pla di numeri reali è sempre compresa tra il massimo ed il minimo di tali numeri, e coincide con il massimo o con il minimo solo quando tutti questi numeri coincidono (questo è dovuto al fatto che disuguaglianze dello stesso verso possono essere sommate membro a membro, con disuguaglianza finale stretta se e solo se una almeno delle disuguaglianze che vengono sommate è tale).

Ordiniamo gli abitanti in ordine decrescente di età, $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_n$, dove $n = 235.163$. Sia, per abbreviare, $\mu = 34,3$ l'età media. Sia $\mu_1 = (x_1 + \cdots + x_k)/k$ l'età media dei primi k abitanti, $\mu_2 = (x_{k+1} + \cdots + x_n)/(n-k)$ l'età media dei rimanenti. Si noti che si ha, per quanto sopra detto, $\mu_1 \geq x_k$ e $\mu_2 \leq x_{k+1}$; si ha quindi

$$(*) \qquad \mu_1 \geq x_k \geq x_{k+1} \geq \mu_2.$$

Inoltre si ha $k\mu_1 + (n-k)\mu_2 = n\mu$, da cui

$$(**) \qquad k(\mu_1 - \mu) = (n-k)(\mu - \mu_2).$$

Affermiamo che si ha $\mu_1 > \mu$, mostrando che $\mu_1 \leq \mu$ conduce ad un assurdo. Se fosse $\mu_1 < \mu$, da $(**)$ si ricava $\mu < \mu_2$, assurdo perché da $(*)$ si ha $\mu_2 \leq \mu_1 (< \mu)$. Se fosse $\mu_1 = \mu$, da $(**)$ si ricava $\mu_2 = \mu$ e quindi $\mu_2 = \mu_1$; in $(*)$ tutte le disuguaglianze sono allora verificate come uguaglianze; da $\mu_1 = x_k$ segue $x_1 = \cdots = x_k$ e da $\mu_2 = x_{k+1}$ segue $x_{k+1} = \cdots = x_n$; ma è anche $x_k = x_{k+1}$ e quindi tutti gli abitanti hanno la stessa età, assurdo perchè $\mu = 34,3$ non è intero. Resta quindi solo $\mu_1 > \mu$; si noti che si ha allora anche $\mu_2 < \mu$, da $(**)$; si è provata quindi anche la parte con la disuguaglianza inversa (con $n-k$ al posto di k).

Osservazione. Moltiplicando $34,3$ per 235.163 si ottiene $8066090,9$ che non è intero, in apparente contraddizione con quanto detto sulle età. Questo è invece irrilevante; l'età media è ovviamente data con approssimazione alla prima cifra decimale; essendo il denominatore 235.163

il numero razionale della vera età media può avere un allineamento periodico con periodo molto lungo!

Inoltre, non si deve credere che sia $\mu = (\mu_1 + \mu_2)/2$! La media μ non è la media aritmetica di μ_1 e μ_2, ne è la *media pesata* con i pesi k ed $n-k$:

$$\mu = \frac{k\,\mu_1 + (n-k)\,\mu_2}{k + (n-k)},$$

come si vede subito.

Risoluzione alternativa Un'altra risoluzione, forse più elegante, è la seguente (ci limitiamo al caso $\geq$ e $>$, l'altro caso essendo in tutto analogo). Ordiniamo sempre gli abitanti in ordine decrescente di età, $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_{n-1} \geq x_n$. Sia μ la media, e sia μ_{n-1} la media degli $n-1$ più vecchi; si ha allora $\mu_{n-1} \geq \mu$, ed anzi $\mu_{n-1} > \mu$ se non tutti gli abitanti hanno la stessa età. Infatti si ha

$$\mu_{n-1} = \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} = \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n - x_n}{n-1} = \frac{n\mu - x_n}{n-1};$$

si ha ora $\mu \geq x_n$, quindi $-x_n \geq -\mu$, e quindi

$$\mu_{n-1} = \frac{n\mu - x_n}{n-1} \geq \frac{n\mu - \mu}{n-1} = \mu;$$

in generale, se $\mu_k = (x_1 + \cdots + x_k)/k$ è l'età media dei k abitanti più vecchi si ha

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_{n-1} \geq \mu,$$

e l'affermazione con la disuguaglianza in senso lato è provata. Se poi non tutti gli abitanti hanno la stessa età, cosa nel nostro caso impossibile come sopra visto, allora $\mu > x_n$ e quindi anche $\mu_{n-1} > \mu$, ripetendo quanto fatto sopra. Si ha allora

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_{n-1} > \mu,$$

e si conclude. □

Esercizio 4. Diciamo *pitagorico* un triangolo rettangolo se le lunghezze dei suoi lati sono numeri interi. Si dimostri che in ogni triangolo rettangolo pitagorico il raggio del cerchio inscritto ha lunghezza intera.

Risoluzione. Siano a, b i cateti e c l'ipotenusa di un triangolo pitagorico. Sia r il segmento di tangente dal vertice dell'angolo retto al cerchio inscritto (coincidente ovviamente con il raggio del cerchio stesso), e siano u e v i segmenti di tangente dai vertici sull'ipotenusa (vedi figura).

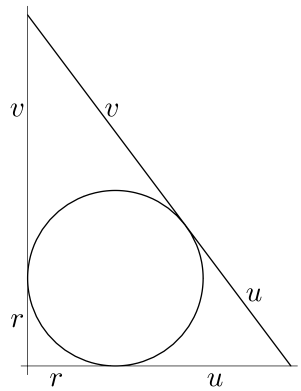


Figura 1. Triangolo rettangolo di cateti $a = r + u$, $b = r + v$ ed ipotenusa $c = u + v$.

Si ha allora il sistema lineare:

$$\begin{cases} r + u = a \\ r + v = b \\ u + v = c \end{cases} \quad ; \quad \text{sottraendo alla seconda la terza si ottiene} \quad r - u = b - c$$

e quindi il sistema

$$\begin{cases} r+u=a \\ r-u=b-c \end{cases} \quad \text{da cui} \quad r=\frac{a+b-c}{2}.$$

Occorre provare che l'intero $a+b-c$ è pari. Si ricordi che il quadrato di un intero dispari è dispari, $(2k+1)^2=4k^2+4k+1$. Ne segue che se a e b sono entrambi pari o entrambi dispari allora c è pari (infatti $a^2+b^2=c^2$ è pari; per quanto prima detto c, per ipotesi intero, è pari); se a è pari, e b è dispari allora a^2+b^2 è dispari, e quindi tale è anche c; in ogni caso $a+b-c$ è pari. □

Esercizio 5. Una pulce disorientata salta da un vertice ad un altro del triangolo ABC: quando è in un vertice salta in uno degli altri due con uguale probabilità. Supponendo che la pulce parta dal vertice A, dire se la probabilità che essa sia nuovamente nel vertice A dopo 100 salti è maggiore, minore, od uguale ad 1/3.

Risoluzione. Siano a_n, b_n, c_n le probabilità di trovare le pulci rispettivamente in A, B, C dopo n salti, partendo dal vertice A. Si ha quindi $a_0=1$, $b_0=c_0=0$. È chiaro che si ha $a_{n+1}=b_n/2+c_n/2$ e che inoltre $a_n+b_n+c_n=1$, per ogni $n=0,1,2,3,\ldots$; quindi $a_n=1-(b_n+c_n)=1-2a_{n+1}$, da cui la relazione ricorrente

$$(*) \qquad a_{n+1}=\frac{1}{2}-\frac{a_n}{2}; \quad a_0=1.$$

Usando $(*)$ si vede subito che se $a_n>1/3$ allora anche $a_{n+2}>1/3$:

$$a_{n+2}=\frac{1}{2}-\frac{a_{n+1}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{a_n}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{a_n}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}.$$

Ne segue, essendo $a_0=1>1/3$, che si ha $a_2>1/3$, $a_4>1/3$, ... , in generale $a_{2k}>1/3$ e quindi $a_{100}>1/3$.

Osservazione. La formula ricorrente $(*)$, unita ad $a_0=1$, permette di scrivere l'espressione esplicita di a_n. Dovendo stimare la differenza fra a_n ed 1/3, poniamo $x_n=a_n-1/3$; la relazione ricorrente in termini di x_n diventa $x_{n+1}+1/3=1/2-(x_n+1/3)/2$, ovvero:

$$x_{n+1}=-\frac{x_n}{2}; \quad x_0=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \quad \text{da cui subito} \quad x_n=\frac{(-1)^n}{2^n}\frac{2}{3} \quad n=0,1,2,3,\ldots$$

quindi anche

$$a_n=\frac{1}{3}+\frac{(-1)^n}{2^n}\frac{2}{3},$$

che per $n=100$ è maggiore di 1/3, come già sapevamo. La successione a_n oscilla tra valori maggiori di 1/3 per n pari, e valori minori di 1/3 per n dispari, tendendo al limite 1/3 per n che tende all'infinito.

□

Esercizio 6. Nella cittadina di Emporia nel Kansas le strade sono tutte in direzione est–ovest oppure nord–sud, e la distanza fra strade parallele successive è di 100m. Si vuole andare da un incrocio di strade ad un altro, 1km più a nord e 0,5km più ad est. Quanti possibili percorsi di minima lunghezza esistono fra questi due punti?

Risoluzione. La minima lunghezza di un percorso possibile è chiaramente $(1+0,5)$km$=15\times$ 100m. Dei 15 tratti di 100m ce ne sono 10 da percorrere in direzione sud–nord, 5 da percorrere in direzione ovest–est. Ogni percorso, una poligonale con 15 lati lunghi 100m di cui 10 in direzione sud–nord (abbreviato N) e 5 in direzione ovest–est (abbreviato E) è individuato da una parola di 15 lettere, contenente 10 volte la lettera N e 5 volte la lettera E. Tali parole sono evidentemente tante quanti sono i sottoinsiemi con 10 elementi di un insieme di 15 elementi, e cioè il coefficiente binomiale

$$\binom{15}{10} = \frac{15!}{10!5!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 11 = 3003.$$

Osservazione. Un'altra risoluzione può essere svolta sulla linea induttiva che conduce al triangolo di Pascal–Tartaglia. Prendiamo nel piano i punti con coordinate intere non negative, $\mathsf{N} \times \mathsf{N} = \{(k,l) : k,l \geq 0 \ k,l \text{ interi}\}$. Indichiamo con $p(k,l)$ il numero di percorsi ammissibili di minima lunghezza che congiungono l'origine $(0,0)$ con (k,l), per ogni $(k,l) \in \mathsf{N} \times \mathsf{N}$, intendendo come percorsi ammissibili le poligonali con i vertici in $\mathsf{N} \times \mathsf{N}$. Si ha evidentemente $p(k,0) = p(0,l) = 1$ per ogni $k,l \geq 0$ interi (in tal caso l'unico percorso di minima lunghezza è il segmento di retta), mentre se $k,l > 0$ si ha

$$p(k,l) = p(k-1,l) + p(k,l-1).$$

Infatti, per arrivare al punto (k,l) si passa necessariamente o per il punto $(k-1,l)$ o per il punto $(k,l-1)$, e l'insieme dei percorsi che conducono a (k,l) è pertanto unione disgiunta di tali due classi di percorsi. Lo schema per costruire i $p(k,l)$ è quindi identico a quello del triangolo di Pascal–Tartaglia. Ruotando di 135^0 in verso orario un disegno del reticolo $\mathsf{N} \times \mathsf{N}$ si può anche fare in modo di ritrovare lo schema nella posizione abituale!

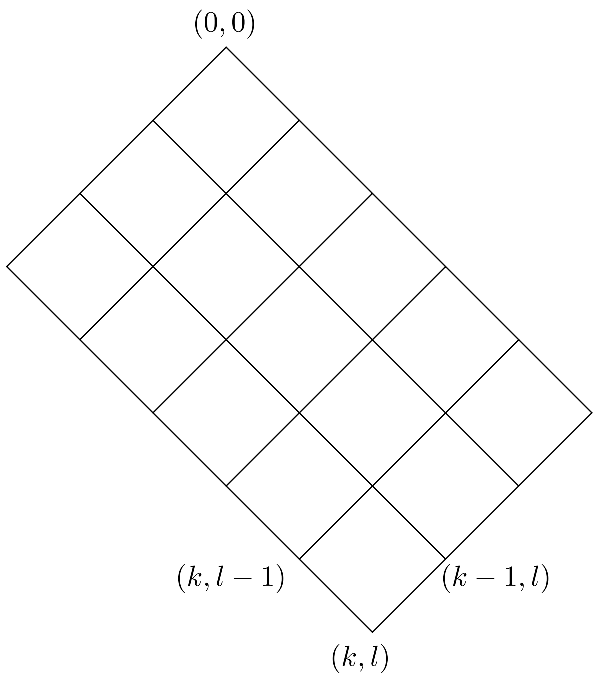


Figura 2. $p(k,l) = p(k-1,l) + p(k,l-1)$.

□