Allegato 2 al verbale del 21/9/2010

SCUOLA GALILEIANA DI STUDI SUPERIORI — CLASSE DI SCIENZE NATURALI

ESAME DI AMMISSIONE, PROVA DI MATEMATICA — 21 SETTEMBRE 2010

Il/La candidato/a deve svolgere, a sua scelta, non più di quattro dei sette esercizi che seguono. Tutti gli esercizi hanno lo stesso valore in termini di valutazione. Il/La candidato/a deve indicare, apponendo una croce nelle apposite caselle, quali tra gli esercizi vuole vengano considerati per la correzione. Esercizi che non siano chiaramente indicati in questa forma non verranno presi in considerazione. Vengono valutate anche soluzioni parziali di esercizi.

AVVERTENZA: Questo foglio deve essere consegnato assieme all'elaborato.

1	2	3	4	5	6	7

Esercizio 1. Sia X un insieme di cardinalità $n \in \mathbb{N}$. Quante sono le coppie (Y, Z), dove Y e Z sono sottoinsiemi di X, tali che $Y \cap Z = \emptyset$ (insieme vuoto)?

Esercizio 2. Siano a, m e n numeri naturali strettamente maggiori di 1.

i) Si dimostri che se $p = a^m - 1$ è un numero primo, allora $a = 2$ e m è primo.

ii) Si dimostri che se $q = a^n + 1$ è un numero primo, allora a è pari e $n = 2^r$ con r naturale.

Esercizio 3. Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ e siano $0 < x_1 < \ldots < x_n < 1$. Si dimostri che esiste un $x \in [0, 1]$ tale che la media aritmetica delle distanze di x da x_k, $k = 1, \ldots, n$, è $\frac{1}{2}$. In altre parole

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x - x_k| = \frac{1}{2}.$$

Quanti x con la proprietà suddetta esistono?

Esercizio 4. Sia $f \colon A \to B$ un'applicazione tra due insiemi.

i) Si dimostri che l'applicazione f è iniettiva se e solo se, per ogni coppia di sottoinsiemi X e Y di A tali che $X \cap Y = \emptyset$, si ha $f(X) \cap f(Y) = \emptyset$.

ii) Si dimostri che l'applicazione f è iniettiva se e solo se per ogni coppia di sottoinsiemi X e Y di A si ha $f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$.

Esercizio 5. La sorgente di un fascio di luce laser è fissata ad un supporto circolare C di raggio 1, centrato nell'origine del piano. Il fascio di luce ha origine dal punto di coordinate $(x, y) = (1, 0)$ ed è diretto tangenzialmente a C, puntando nella direzione del semipiano $\{y > 0\}$. Il supporto C può ruotare attorno all'origine. Si calcoli di che angolo deve ruotare il supporto C perchè il fascio di luce colpisca un punto di coordinate (x, y), con $x > 1$ e $y > 0$.

Esercizio 6. Un tetraedro si trova appoggiato su un piano con una certa faccia, gli viene dato un colpo e comincia a rotolare. Il rotolamento avviene per facce successive, tutte equiprobabili.

i) Si calcoli la probabilità q_n che il tetraedro torni a poggiare sulla faccia iniziale esattamente dopo n rotolamenti (e non prima).

ii) Si calcoli la probabilità p_n che dopo n rotolamenti il tetraedro torni a poggiare sulla faccia iniziale. È possibile che tale probabilità sia nulla?

iii) Si calcoli il numero medio di rotolamenti necessari affinchè il tetraedro torni a poggiare sulla faccia iniziale (suggerimento: può essere utile sapere che $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ per $|x| < 1 \ldots$).

Esercizio 7.

i) Si dimostri che per ogni numero naturale $h \geqslant 1$ si ha

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + h \cdot h! = (h+1)! - 1.$$

ii) Si dimostri che ogni numero naturale n può essere scritto nella forma

$$n = c_1 \cdot 1! + c_2 \cdot 2! + c_3 \cdot 3! + \cdots + c_h \cdot h!\ ,$$

dove $h, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_h$ sono numeri naturali e $c_i \leqslant i$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, h$.

iii) Si dimostri le scrittura in ii) è essenzialmente unica nel senso seguente: se

$$n \;=\; c_1 \cdot 1! + c_2 \cdot 2! + c_3 \cdot 3! + \cdots + c_h \cdot h! \;=\; d_1 \cdot 1! + d_2 \cdot 2! + d_3 \cdot 3! + \cdots + d_\ell \cdot \ell!,$$

dove $h, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_h, \ell, d_1, d_2, d_3, \ldots, d_\ell$ sono numeri naturali, $c_i \leqslant i$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, h$, $d_j \leqslant j$ per ogni $j = 1, 2, \ldots, \ell$ e $h \leqslant \ell$, allora $c_i = d_i$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, h$ e $d_j = 0$ per ogni $j = h+1, h+2, \ldots, \ell$.